CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

SESSION 1993
EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS
CH-TB

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 h 00

L'utilisation des calculatrices est autorisée dans le cadre des dispositions de la circulaire 86. 228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif

On étudie tout d'abord les polynômes de Legendre comme vecteurs propres d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes. Leur orthogonalité permet ensuite de prouver qu'ils ont toutes leurs racines réelles et distinctes. La dernière partie propose d'obtenir des valeurs approchées de ces racines en utilisant la méthode de Graeffe.

Dans tout le problème on note :

- **E** l'espace vectoriel sur **R** des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à l'entier strictement positif n.

- Φ l'application qui, à toute fonction polynôme P de **E** associe la fonction polynôme $\Phi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ \Phi(P)(x) = (x - x^2)P''(x) + (1 - 2x)P'(x)$$

- U_p les fonctions polynômes définies par $U_0(x) = 1$ et, pour tout entier p compris entre 1 et n :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ U_p(x) = (x - x^2)^p$$

- L_p les fonctions polynômes définies par $L_0(x) = 1$ et, pour tout entier p compris entre 1 et n :

$$\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ L_p(x) = \frac{1}{p!}\frac{d^p U_p}{dx^p}(x)$$

A. Etude des valeurs propres

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de **E**.

2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de **E** : $(1, x, \ldots, x^n)$

3. En déduire les valeurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

B. Etude des vecteurs propres

1.a. Montrer que L_p est une fonction polynôme de degré p.

b. On écrit $L_p(x) = \sum_{k=0}^{p} l_{p,k} x^k$, calculer les coefficients $l_{p,k}$ pour $0 \leq k \leq p$, à l'aide des coefficients du binôme.

c. Exprimer $l_{p,k+1}$ en fonction de $l_{p,k}$, k et p. En déduire un algorithme de calcul de L_p, l'entier p étant donné.
Donner explicitement les fonctions L_1, L_2, L_3 et L_4.

2.a. En remarquant que l'on peut écrire $U_p(x) = x^p(1-x)^p$ et en utilisant la formule de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions, donner une autre expression de L_p faisant intervenir les puissances de x et de $1-x$.
En déduire les valeurs de $L_p(0)$ et $L_p(1)$.

b. Montrer que, pour tout entier p :

(1) $\qquad (x-x^2)U_p'(x) = p(1-2x)U_p(x)$

En dérivant $p+1$ fois la relation (1) montrer que les L_p sont des vecteurs propres de Φ

C. Orthogonalité des polynômes de L_p pour $1 \leq p$

1. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq p-1$ on a, $U_p^{(k)}$ désignant la dérivée d'ordre k de U_p :

$$U_p^{(k)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad U_p^{(k)}(1) = 0$$

2. Si P est une fonction polynôme de **E** montrer que, pour tout p ($1 \leq p$) :

(2) $\qquad \int_0^1 P(t)L_p(t)\,dt = \frac{(-1)^p}{p!}\int_0^1 P^{(p)}(t)U_p(t)\,dt$

en déduire

(3) $\qquad \int_0^1 L_p(t)\,dt = 0$

3.a. En utilisant (2) montrer que pour tout couple d'entiers p et q, si $0 \leq q < p$ alors $\int_0^1 L_q(t)L_p(t)\,dt = 0$

b. Soient a et b deux entiers naturels, montrer que : $\int_0^1 t^a(1-t)^b\,dt = \frac{1}{(a+b+1)C_{a+b}^a}$

c. En déduire, en utilisant (2) : $\int_0^1 L_p(t)L_p(t)\,dt = \frac{1}{2p+1}$

d. L'espace **E** étant muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

donner une base orthonormale de **E** s'exprimant à l'aide des polynômes L_p

D. Recherche des zéros de L_p pour $1 \leq p$

1. Déduire de (3) que L_p ne peut avoir un signe constant sur]0,1[et qu'elle y admet donc au moins une racine d'ordre impair.

2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les racines d'ordre impair de L_p sur]0,1[, on pose

$$Q(t) = (t-x_1)\ldots(t-x_q) \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 Q(t)L_p(t)\,dt$$

Montrer par un raisonnement par l'absurde que q = p.
Indication : supposer que q < p et démontrer
. que J n'est pas nulle.
. que J est nulle en utilisant la relation (2)
Que peut-on en conclure pour les racines de L_p?

E. Valeurs approchées des zéros

Pour déterminer des valeurs approchées des zéros des polynômes L_p on utilise l'algorithme de Graeffe qui permet d'avoir tous les zéros.

Soit A une fonction polynôme de degré m à coefficients réels :

$$A(x) = a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}a_1 x + (-1)^m a_0$$

admettant m zéros distincts et positifs : $0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \ldots < \alpha_1$

soit : $$A(x) = a_m \prod_{j=1}^{m} (x - \alpha_j)$$

On pose : $$\bar{A}(x) = a_m \prod_{j=1}^{m} (x + \alpha_j)$$

et $$P(x) = A(x)\,\bar{A}(x)$$

1.a. Quelles sont les relations entre les coefficients a_j et les zéros α_j de la fonction polynôme A ?

b. Montrer que P est une fonction polynôme de degré $2m$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = b_m x^{2m} - b_{m-1}x^{2m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}b_1 x^2 + (-1)^m b_0$$

où tous les coefficients b_j sont des réels.
Exprimer les coefficients de P en fonction de ceux de A.
(On pourra remarquer que $P(x) = (-1)^m A(x) A(-x)$)

2. On définit alors le polynôme B par : $B(x) = b_m x^m - b_{m-1}x^{m-1} + ... + (-1)^{m-1} b_1 x + (-1)^m b_0$

Ce polynôme B, noté $\Psi(A)$, est ainsi associé à un polynôme A de degré m ($1 \leq m$) admettant m zéros réels distincts et strictement positifs.

a. Quels sont les zéros de la fonction polynôme B ?

b. Montrer que les coefficients b_j , ($0 \leq j \leq m$) sont tous strictement positifs.

3. Le polynôme L_p admet p zéros distincts : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ avec $0 < \lambda_p < ... < \lambda_2 < \lambda_1$

On définit la suite de fonctions polynômes A_k par :

$$A_0 = (-1)^p L_p \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbf{N}^* , A_k = \Psi(A_{k-1})$$

et on pose : $A_k(x) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^{p+j} a_{k,j} x^j$

a. Quels sont les zéros de A_k ?

b. Pour $1 \leq j \leq p$ on note (v_j) la suite dont le terme général, noté $v_{j,k}$, est défini par

$$\forall k \in \mathbf{N} , v_{j,k} = \left(\frac{a_{k,p-j}}{a_{k,p-j+1}} \right)^{\frac{1}{2^k}}.$$

Montrer que, pour $1 \leq j \leq p$, la suite (v_j) converge et a pour limite λ_j

4. Déduire de ce qui précède un algorithme de calcul des racines du polynôme L_p, l'entier p étant donné.

On prendra comme test d'arrêt, ε étant un réel strictement positif donné :

$$\max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{a_{k+1,j} - a_{k,j}^2}{a_{k+1,j}} \right| \leq \varepsilon$$

(c'est à dire lorsque les coefficients du polynôme A_{k+1} sont égaux, en valeur relative et à ε près, aux carrés des coefficients du polynôme A_k)